MATHEMATIK

1.) Komplexe Zahlen:

- $|z| = r$ // $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = r^2$ // $r \overset{!}{\geq} 0$
- Spiegelbilder:

$a+bi=z$:			$r \cdot e^{i\varphi}$:	
Ursprung:	$-a-bi = -z$		Ursprung:	$r \cdot e^{i(\varphi+\pi)} = -z$
$\mathbb{R}$-Achse:	$a-bi = \bar{z}$		$\mathbb{R}$-Achse:	$r \cdot e^{-i\varphi} = \bar{z}$
i-Achse:	$-a+bi = -\bar{z}$		i-Achse:	$r \cdot e^{i(\pi-\varphi)} = -\bar{z}$
I/III Quadrant:	$b+ai = i \cdot \bar{z}$		I/III Quadrant:	$r \cdot e^{i(\frac{\pi}{2}-\varphi)} = i\bar{z}$
II/IV Quadrant:	$-b-ai = -i\bar{z}$		II/IV Quadrant:	$r \cdot e^{i(\frac{3}{2}\pi-\varphi)} = -i \cdot \bar{z}$

- n'te Einheitswurzel: $z^n = a+bi$ // $r \cdot e^{i\varphi}$
  1.) Bestimmung r & φ
  2.) $z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\frac{\varphi}{n}+k \cdot \frac{2\pi}{n})}$ (Anfang $k=0$)

2.) Grenzwerte/Folgen/Reihen:

» Eine Folge heißt konvergent mit dem Grenzwert „a", wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen von ε abhängigen Index gibt, mit $n_0 = n_{0(\varepsilon)} \in \mathbb{N}_0$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt. «

ε ist nie 0

1.) geometrisch: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q =$ konstant: $a_n = a_0 \cdot (q)^{n(-1)}$
2.) arithmetisch: $a_{n+1} - a_n = d =$ konstant: $a_n = a_0 + (n \cdot d)$
& monoton (streng) wachsend / fallend je $\leq$ & $<$

- Polynome: gebrochen rationale Funktion mit Zählergrad p & Nennergrad q

$\lim_{n\to\infty} a_n$:
- $-\infty$; $p>q$ & $\frac{a}{b}<0$
- 0 ; $p<q$
- $\frac{a}{b}$; $p=q$
- $+\infty$; $p>q$ & $\frac{a}{b}>0$

$\frac{a \cdot n^p \ldots}{b \cdot n^q \ldots}$ nur rechtsseitig gültig!

- Konvergenzkriterien:
  - Quotient [Potenzen & Fakultäten] $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ konvergent $| > 1$ divergent
  - Wurzel [$^\wedge k$] $\sqrt[n]{a_n} < 1$ konver. $| > 1$ diver.
  - Leibniz [alternierenden] ⚠ Nachweis das MONOTON FALLENDE NULLFOLGE
  - Vergleich ⚠ höchste Potenzen oben/unten beibehalten!

$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e$ muss gleich

$\sqrt{k} \pm \sqrt{k \pm 1}$ (erweitern mit $\sqrt{k} \mp \sqrt{k \pm 1}$)

$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n$!

- Verzinsungen:
  einfach: $K_n = K_0 \cdot (1+ni)$ stetig: $K_n = K_0 \cdot e^{ni}$
  Zinseszins: $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$ Sparkasse: $S = K_0 \cdot q^n + R \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$ $\left(i = \frac{p}{100}\right)$

3. Funktionen:

» Sei D_f Teilmenge von $\mathbb{R}$. Eine Vorschrift f, die jedem Element von D_f genau einen (reellwertigen) Zahlenwert zuordnet, heißt (reellwertige) Funktion von D_f nach $\mathbb{R}$. «

- Polynome:
  - Polynome n'ter Ordnung lassen sich „n" 1. Ordnung zerlegen
  - gerade NST berühren / ungerade schneiden // gerade PST // ungerade
  - Faktor / NST kürzbar ⇒ Löcher
  - Asymptote: geb. Funktion: Polynomdivision bis Rest!
  - $\frac{Z}{N}$: $Z = N+1 \rightsquigarrow \infty =$ Gerade
    $Z = N+2 \rightsquigarrow \infty =$ Parabel
    $Z = N \rightsquigarrow \infty =$ Konstante

  gerade Funktion: Spiegelbild am y.
  ungerade Funktion: " am Ursprung

Asymptote als Bedingung: Polynomdivision, wenn konstant einfach davor (oben)

Tangentengleichung: $t(x) = f'(a) \cdot (x-a) + f(a)$

- Kurvendiskussion:
  NST $= f(x) \overset{!}{=} 0$
  Extrema $= f'(x) \overset{!}{=} 0$ in $f''(x) \gtrless 1$? >0 Minimum $| <0$ Maximum
  Wendepunkte $= f''(x) = 0$ Wechsel der Krümmung! // konvex // konkav
  wenn eine Seite nicht beschränkt unbeschränkt oben/unten

- Elastizitäten:
  Elastizität: $\varepsilon_{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$
  Änderungsrate: $\rho_{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}$
  logarithmische Ableitung: $f'(x) = f(x) \cdot [\ln(f(x))]'$ Potenz

$|\varepsilon| < 1$ unel.
$|\varepsilon| = 1$ einh.
$|\varepsilon| > 1$ el.

Umsatz: $\varepsilon(x \cdot f(x)) = \varepsilon_{f(x)} + 1$ // Ø: $\varepsilon\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \varepsilon_{f(x)} - 1$ // ?: $\varepsilon(e^{f(x)}) = \varepsilon_{f(x)} \cdot f(x)$

4.) Integration: • $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$ // $\frac{d}{dx} a^x = a^x \cdot \ln(a)$

• Stetigkeit: $\lim_{x \to x_0-} f(x) \doteq \lim_{x \to x_0+} f(x)$ // Differenzierbarkeit: $\lim_{x \to x_0-} f'(x) \doteq \lim_{x \to x_0+} f'(x)$

• partielle Integration: $\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx$

⚠ Achtung manchmal rechts auch gleiches $\int dx$ dann → teilen

• Substitution: (1) $(x \ldots) = z$ (2) $\frac{dz}{dx} = \ldots$ (3) so umstellen dass einsetzbar

⚠ kein Term mit beiden Variablen! (4) Integration (5) Rücksubstitution

• uneigentliche Integrale: Normal integrieren, als Grenze dann aber Grenzwert!

5.) 2 Variablen: • Niveaulinien/Höhenlinien: • Funktion = c (konstant) setzen; nach y auflösen; 2D-aufzeichnen
• auch $x=0$ // $y=0$ Schnitte durchführen

• Tangentialebene: $z(x)$: $z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$

• Homogenitätsgrad: (Skalenerträge) vor jede Variable ein λ ⇒ dann vorziehend Potenzen verrechnen ⇒ Potenzen ≙ Homogenitätsgrad

• Extremwertberechnung: (1) partielle Ableitung „x" $\doteq 0$ ⇒ Werte: $y_1; x_2 \ldots$

[⚠ Fallunterscheidungen] (2) Werte in part. Ableitung „y" $\doteq 0$ ... Partnerwerte ermitteln

(3) Extremwertverdächtige Punkte in Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = z_{xx} \cdot z_{yy} - (z_{xy})^2$$

< 0 = Sattelpunkt
> 0 = Extremalverdächtig

(4) Punkte in f_{xx} // f_{xy} um Minimum / Maximum zu bestimmen

• Lagrange: Extremwerte unter Nebenbedingungen:

$$\underbrace{f(x): \ldots \qquad NB: (\ldots) \doteq 0}_{L(x \ldots) = \ldots + \lambda_1 \cdot (\ldots)}$$

Alle Ableitungen & GS lösen

• allgemeine Lösung inhomogene DGL 1. Ordnung:

$$f'(x) + a(x) \cdot f(x) = b(x)$$

$$\hookrightarrow f(x) = e^{-\int a(x) dx} \cdot \int b(x) \cdot e^{\int a(x) dx} \, dx$$

homogen:

$$f'(x) + a(x) \cdot f(x) = 0$$

$$f(x) = C \cdot e^{-\int a(x) dx}$$

Amoroso-Robinson: $f'(x) = \varepsilon \cdot \bar{f}(x) = (\varepsilon_{\bar{f}} + 1) \cdot \bar{f}(x)$